

THE “RELATIVISTIC” MUG

L. B. Okun
ITEP, Moscow, Russia

20.10.10

Abstract

This note is an attempt to explain in simple words why the famous relation $E = mc^2$ misrepresents the essence of Einstein’s relativity theory. The note is addressed to high-school teachers, and a part of it – to those university professors who permit themselves to say that the mass of a body increases with its velocity or momentum and thus mislead the teachers and their students.

1 Introduction

The moral health of the modern society and its material well-being are unthinkable without high status of science in the country. This status in a certain degree depends on how adequate is the image of science in the mirror of mass culture. For more than twenty years I have been collecting artifacts of mass culture (from postcards and T-shirts to popular articles and books) sporting “the famous Einstein’s formula”.

Recently my friends added to my collection a Relativity Floxy Noxy mug. You can google (typing these four words in the search line of your computer) and see it:



The Relativity Mug

In a certain sense it contains the quintessence of my collection presenting the main popular science clichés and misconceptions. As they are quite often repeated in newspapers and textbooks, I decided to reproduce the text on the mug and to explain briefly what is wrong with it. I believe that it may be useful to many people.

2 The text on the mug

There are three columns of text on the mug – to the right of the handle (1), to the left of the handle (2), opposite the handle (3):

Column 1. In 1905 at the age of 26, Einstein proposed the Special Theory of Relativity, using the equation:

$$E = mc^2$$

where

E =energy,

m =mass,

c =the speed of light.

Special relativity expresses the concept that matter and energy are really different forms of the same thing. Any mass has an associated energy and vice versa.

Column 2. Albert Einstein's

SPECIAL

Theory of

RELATIVITY

In the 1850's it was calculated that light traveled at a fixed speed of 670 million mph.

However, whatever speed we traveled at, we would never catch up with the speed of light.

Einstein proposed that if the speed of light is always fixed, something else must give way, i. e. mass must change. An object must get heavier as it approaches the speed of light. He concluded that energy and mass must be interrelated.

Column 3. His formula suggested that tiny amounts of mass can be converted into huge amounts of energy...

... which revealed the secret of how stars shine and unlocked the key to atomic energy.

3 My clarifications and comments

Column 1. As is well known, Maxwell in 1860-70's united optics with electricity and magnetism by establishing equations describing not only static fields, but also alternating electromagnetic fields propagating in a vacuum with velocity of light. Several physicists in the 1880-90's after realizing that Maxwell equations are incompatible with equations of Newton mechanics have attempted to preserve the latter at velocities comparable to that of light by postulating that all new physics can be reduced to the increase of mass of a body with its velocity. These attempts were continued in the 20th century; they are briefly

described in the articles [1], [2]. However it became clear rather soon that some of the Newton equations cannot be preserved, for instance the famous equation $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, where \mathbf{F} is force and \mathbf{a} is acceleration. It turned out that the equations themselves should be changed in such a way that mass would not depend on velocity, but there would exist an important new link between mass and energy. Let us note that relation between force and momentum remained the same: $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$, but, as we will see below, the relation between momentum and velocity $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ has changed. This had serious impact on the language and philosophy of physics.

In summer of 1905 Einstein published a detailed article [3] in which he presented his theory which later got the name Einstein's theory of relativity. This theory extended to electromagnetic phenomena the principle of relativity formulated by Galileo and Newton. According to it, it is impossible by any experiment to find out whether a closed space (say, a cabin of a ship) is at rest or in a uniform and rectilinear motion. Soon the theory was extended to the newly discovered nuclear phenomena and got the name Special Relativity (SR). This theory describes the motion and interaction of fast particles whose velocities are comparable with the speed of light. Such particles are called relativistic. (In 1915 Einstein proposed General Relativity (GR) to describe gravity. But in this note we will not consider it.)

In autumn of 1905 Einstein published a short note [4] in which he stated that in the framework of his theory the mass of a body is a measure of its energy content. The total energy E of a free body is equal, according to the theory of relativity, to the sum of its kinetic energy E_K (of the motion as a whole) and its energy at rest – rest energy E_0 :

$$E = E_K + E_0. \quad (1)$$

Of course, the concept of a free (isolated from any external influence) body is an idealization. But idealization (abstraction) lies at the basis of scientific method and is extremely fruitful.

The realization that any body at rest possesses energy was the greatest discovery of the 20th century. The amount of this energy is given by Einstein's equation:

$$E_0 = mc^2, \quad (2)$$

where m is the mass of the body and c is the speed of light. (It was exactly in this form that Einstein had written equation (44) in 1921 in his lectures "The meaning of relativity" [5], though the notion of the rest energy E_0 appeared already in the note [4].)

The kinetic energy of ordinary bodies is given by the well known equation of Newton's mechanics $E_K = mv^2/2$. As the velocity v of an ordinary body is much less than c , the rest energy of a body is huge in comparison with its kinetic energy. But in the ordinary life the rest energy does not manifest itself. Einstein pointed out that part of it is liberated in the radioactive decays.

Unfortunately, many famous physicists during the last century have formulated the Einstein equation in a "simplified form" by omitting the index zero:

$$E = mc^2, \quad (3)$$

and treating this relation as increase of mass not only with energy but also with velocity and momentum of the body.

In 1948 Einstein warned Barnett – the author of the book "Universe of Dr. Einstein" – against using the concept of mass depending on velocity. (A copy of this handwritten letter is reproduced in ref [1].) But sometimes, especially in his popular writings, he himself did

not care about the index zero. This semantic kink was caused by the clash of two languages – the old non-relativistic and the new, consistently relativistic one.

Column 2. The assertion that the speed of light is always fixed at a value of 670 million mph is correct, but the dating (1850's) is not quite correct. That the speed of light is finite (not infinite), was established in 1676 by Römer who deduced this from observations of Jupiter's satellite. It followed from them that the speed is around 200 000 km/s. The first and more precise measurements of c on the Earth were performed by Fizeau in 1849. But the fact that the speed about 300 000 km/s is fixed and does not depend on the velocities of the source and the observer, was discovered in 1887 by Michelson and Morely.

The statement that energy and mass are interrelated is correct: $E_0 = mc^2$, while that the mass changes with velocity is definitely wrong. In the theory of relativity (unlike the mechanics of Newton) the measure of inertia is not mass m but the total energy E of the body. The momentum \mathbf{p} of a body is connected with its velocity \mathbf{v} not by the Newton's relation $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ but by the relation

$$\mathbf{p} = (E/c^2)\mathbf{v}. \quad (4)$$

As a result it is the more difficult to change the momentum of a body, the higher its total energy E . And $E/c^2 = m$ only at zero momentum, when the total energy equals the rest energy E_0 .

One can feel more deeply that the measure of inertia is energy by considering the example of the Large Electron-Positron collider LEP which operated at CERN during the last decade of the 20th century. Particles with energy 50 GeV were kept in its 27 km ring tunnel by a rather weak field of iron magnets. (Without this field particles would fly along a strait line.) Exactly the same field would maintain the circulation of protons with the same momentum (and almost the same energy), though the mass of the proton is 2000 times larger than the mass of the electron. In the year 2010 the Large Hadron Collider LHC started to operate in the same tunnel. To circulate protons with energy 3500 GeV, the magnetic field of superconducting magnets in it is 70 times stronger.

Thus, the measure of inertia of a particle is its total energy

Column 3. Here everything is correct if one uses the equation $E_0 = mc^2$ and takes into account that in nuclear reactions in the stars, in the Sun and on the Earth a part of the rest energy of the particles which are burned is transformed into kinetic energy of the products of burning. The same is valid for any process of burning.

4 Four dimensions of the world

Now I would like to address a few words to those who are more or less familiar with the concept of four-dimensional world (4-world) introduced in the relativity theory in 1908 by Minkowski [6]. In the 4-world the time coordinate ct of an event and its position coordinates \mathbf{r} form a 4-vector. Similarly the energy E of a free (isolated) body (more precisely, E/c^2) and three components of its momentum \mathbf{p} (more precisely, \mathbf{p}/c) form four components of the pseudo-euclidean 4-vector. The scalar length of this 4-vector is given by the mass of the body m according to the equation

$$m^2 = E^2 c^{-4} - \mathbf{p}^2 c^{-2}. \quad (5)$$

(The words “pseudo euclidean” indicate that the square of the length of the 4-vector is equal not to the sum but to the difference of squares of its E - and \mathbf{p} -components.)

Taylor and Wheeler in the book [8] put energy and momentum on the orthogonal axes, then on the hypotenuse they depict mass by a short and thick segment. But it is possible to present equation (5) simply as a right triangle if one rewrites it in the form $E^2 = m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2$ and puts mass and momentum on the orthogonal axes (see article [7]). Then energy is the hypotenuse, while mass and momentum are the other two legs. For any value of momentum the kinetic energy is

$$E_K = \sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2} - mc^2. \quad (6)$$

The main equation (5) of relativity theory has been tested in thousands of experiments with the accuracy of up to ten digits. For a massive body whose momentum is zero it implies $E_0 = mc^2$. For a non-vanishing momentum one can rewrite it as $(Ec^{-2} - m)(Ec^{-2} + m) = \mathbf{p}^2c^{-2}$ and at $E_K \ll E_0$ derive from it the non-relativistic expression for kinetic energy $E_K = \mathbf{p}^2/2m$ without developing the square root. Similarly, for relativistic particles $E - |\mathbf{p}|c = mc^2/2E$. (This equation is essential for neutrino oscillations.) It follows also from equation (5) and from the formula (4) for velocity $\mathbf{v} = \mathbf{p}c^2/E$ that for a massless particle of light – the photon – the speed is always equal to c .

The special theory of relativity is impeccable. One cannot say the same about its image in the mass culture.

Unfortunately, the sudden illness and death of Minkowski did not allow him to persuade his contemporaries to switch to the language of the four-dimensional world, and they continued futile attempts to explain the meaning of relativity theory in terms of Newton's three-dimensional mechanics. Though Einstein used the four-dimensional mathematical apparatus in deriving the equations of his general theory of relativity for gravitational interaction, I failed to find the equation $E^2c^{-4} - \mathbf{p}^2c^{-2} = m^2$ on the pages of his writings.

It appeared first in the articles of Klein [9], Fock[10], Gordon[11] (1926) and especially in the works of Dirac [12] (1930) in which relativistic quantum mechanics was constructed (as is well known, Einstein, a co-founder of the concept of quantum, did not accept quantum mechanics). The equation appeared in the framework of not quantum but classical field theory much later, in the book “The classical theory of fields” by Landau and Lifshitz in 1941 (in Russian) [13].

Four-dimensional description is equally good for massive and massless particles of matter. It shows that mass and matter are not the same thing, that energy and momentum are the measures of all processes and motions in nature. As for the mass of the particles, it becomes non-essential for processes at high energies $E \gg mc^2$.

5 The speed of light as the unit of velocity

The correct equations must be correct regardless of the choice of units. The existence of the universal maximal velocity c allows one to express any velocity v in units of c as a dimensionless number $\beta = v/c$. It is evident that in these units $\beta = 1$ for $v = c$. As a result one can get rid of c in the equations of relativity theory by rewriting equations (2), (4), (6) in the form

$$E_0 = m, \quad m^2 = E^2 - \mathbf{p}^2, \quad \mathbf{v} = \mathbf{p}/E. \quad (7)$$

As for equation (3) $E = mc^2$, it is reduced to $E = m$, which evidently contradicts equation (1) $E = E_K + E_0 = E_K + m$ and hence is wrong.

6 Conclusion

Volodya Gribov, whose attitude concerning $E = mc^2$ was the same as mine, gave me a friendly advice in 1980s not to struggle against the famous and false equation because this fight just cannot be won. It was with a feeling of permanent defeat that I was writing the text above for the forthcoming volume “Gribov-80” in the summer 2010, amidst the unprecedented heat and smog in Moscow, which could but adversely affect the quality of the text. In autumn, a few weeks ago, Julia Nyiri reminded me that this text is a continuation of my contribution to the volume “Gribov-75” [14] in which I compared the equation $E = mc^2$ with a virus. Indeed, the concept of relativistic mass hidden in the equation $E = mc^2$ is a semantic virus similar to computer viruses. People infected by this virus (they often call themselves relativists) believe that Relativistic Mass is the main portal to Relativity Theory because mass is the measure of inertia. They ignore the fact that mass is the measure of inertia only for very slowly moving bodies and particles for which the rest energy E_0 is much larger than the kinetic energy E_K . When velocities are not very low, mass is only an approximate measure of inertia. For fast particles for which $E_K \gg E_0$ (photons, neutrinos, protons in LHC) the measure of inertia is the total energy E .

It is well known that formulas in physics are a continuation of the ordinary language: equations are encoded sentences, while mathematical symbols in these equations are encoded words or terms. To prevent confusion, each symbol must be unambiguously connected with a corresponding term. Is it possible to introduce in Special Relativity the concept of relativistic mass? Yes, it is possible: $m_r = E/c^2$, though it will be just another symbol for energy because c is a universal constant. Is it possible then to introduce the term relativistic rest mass $m_{r0} = m$? Yes, it is possible. Of course, it is equally possible to introduce both terms and both symbols. Although they are not needed in Special Relativity as it is a complete, self consistent theory without them, their introduction is possible. What is not good is to denote the relativistic rest mass m_{r0} by m_0 and then call it simply rest mass, because this presumes that mass m depends on velocity in Special Relativity (SR), while we all know that in SR m is Lorentz invariant: it is the same at rest and in motion, and hence, there is no sense in supplying it with indices.

But the real trouble begins when m_r is called the mass, is denoted by m and at the same time the ordinary Newtonian mass m is renamed into m_0 . Then the mixing of two languages (“French and Nizhegorodsky”) mutilates the beautiful theory, leads to unbelievable confusion and thwarts its understanding. To top it all, some “philosophers-relativists” then allege that the mechanics of Newton is not a limiting case of mechanics of Einstein, and that these two theories are incommensurate.

As a result of the reverse action of mass culture on the scientific culture, many chapters in the best text-book on physics of the 20th century published in 1960s – “The Feynman Lectures on Physics”[15] – repeat the statement that mass changes with velocity. The little book “What is relativity?”[16] by Landau and Rumer also claims that mass increases with velocity. (The book was written in the 1930s, before the arrest of both authors, and published in the 1950s after Rumer was released from exile. (Landau remained in jail for one year.)) “The classical theory of fields” by Landau and Lifshitz published in 1940s was the first text-book in the world in which mass was velocity-independent. But even in it the concept of rest energy E_0 was missing and the Einstein’s formula was mentioned in the form $E = mc^2$. This discrepancy is kept in the latest edition of the book in the 21st century. Indeed, nobody is perfect. Our language is not perfect: “a spoken thought is a lie”.

It is impossible in this short note to refer to the articles and books of the creators of relativity theory, but it is easy to find them by clicking the hyper references [1], [2], [7],[14], [17], [18] listed below. The seventh hyper reference [19] contains slides of the talk which explained why the teaching of physics must be based on two fundamental constants of nature: c and \hbar . By operating with these two constants I plan to present the foundations of physics in a little book (100 pages) “The ABC of Physics”.

Acknowledgments

I am grateful to Erica Gulyaeva, Marek Karliner, Elya and Vitaly Kisin, Olga Milyaeva, Boris Okun and Zurab Silagadze whose remarks helped me write this note.

The work is supported by grant of the President of RF NSh-4172.2010.2

References

- [1] The concept of mass. Physics Today. June 1989, 31-36.
http://www.itep.ru/theor/persons/lab180/okun/em_3.pdf
- [2] The Einstein formula: $E_0 = mc^2$. “Isn’t the Lord laughing?”. Physics – Uspekhi **51**, (5), 513 - 527 (2008).
http://www.itep.ru/theor/persons/lab180/okun/em_29.pdf
- [3] Einstein A/ Zur Elektrodynamik bewegter Körper. Ann Phys **17**, 891-921 (1905).
- [4] Einstein A. Ist die Tragheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig? Ann Phys **18**, 639-641 (1905).
- [5] Einstein A. Four lectures on the theory of relativity, held at Princeton University in May 1921. Collected papers of Albert Einstein v **7**, doc 71, Princeton (1997).
- [6] Minkowski H. Raum und Zeit. Phys Zeit **10**, 104-111 (1909).
- [7] The theory of relativity and the Pythagorean theorem. Physics - Uspekhi **51**, (6), 622 - 631 (2008).
http://www.itep.ru/theor/persons/lab180/okun/em_30.pdf
- [8] Taylor E F, Wheeler J A. Spacetime physics. New York (1992) (pp 246-252 Dialog: Use and Abuse of the concept of mass).
- [9] Klein O. Quantum Theorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. Zeit f Physik **37**, 895-906 (1926).
- [10] Fock V. Über die invarianten Form der Wellen- und der Bewegungsgleichungen für einen geladenen Massenpunkt. Zeit f Physik **39**, 226-232 (1926).
On the invariant form of wave and motion equations for a charged point mass, Physics - Uspekhi **53**(8) (2010).
- [11] Gordon W. Der Compton Effect nach der Schrödingerschen Theorie. Zeit f Physik **40**, 117-133 (1926).
- [12] Dirac P A M. The principles of quantum mechanics. (1930).

- [13] Ландау Л Д, Лифшиц Е М. Теория поля. М 1941. (in Russian).
Landau L D, Lifshitz E M. The classical theory of fields. Reed Publishing Ltd (2000).
- [14] The virus of relativistic mass in the year of physics *in* Gribov memorial volume (quarks, hadrons and strong interactions). Yu L Dokshitzer, P Levai, J Nyri Editors, WS, (2006) 470-473.
http://www.itep.ru/theor/persons/lab180/okun/em_22.pdf
- [15] Feynman R P, Leighton R B, Sands M. The Feynman lectures on physics. Addison-Wesley (1963).
- [16] Л Д Ландау, Ю Б Румер. Что такое относительность? Советская Россия, М (1959). (in Russian).
Landau L D, Rumer Yu B. What is relativity? Dover (2003).
- [17] Energy and Mass in Relativity Theory. World Scientific.(2009).
<http://www.worldscibooks.com/physics/6833.html>
- [18] Mass versus relativistic and rest masses. Am. J. Phys. **77**, (5), 430-431 (2009).
<http://www.itep.ru/theor/persons/lab180/okun/doc/AJP000430.pdf>
- [19] The main concepts and laws of physics and properties of elementary particles of matter. talk at the Presidium of the Russian Academy of Sciences, 27.10.2009, presented on the site of the Division of Physical Sciences of RAS (in Russian).
http://www.gpad.ac.ru/info/contributions/Okun_Prez.pdf

“РЕЛЯТИВИСТСКАЯ” КРУЖКА

Л. Б. Окунь
ИТЭФ, Москва, Россия

24.10.10

Аннотация

Эта заметка представляет собой попытку просто объяснить, почему знаменитое соотношение $E = mc^2$ неправильно выражает суть теории относительности Эйнштейна. Заметка в основном адресована школьным преподавателям, а часть её – тем университетским профессорам, которые позволяют себе говорить, что масса тела растёт с ростом его скорости или импульса, и тем самым вводят в заблуждение школьных преподавателей и их учеников.

1 Введение

Нравственное здоровье современного общества и его материальное благополучие невозможны без высокого статуса науки в стране. А это, в известной мере определяется тем, насколько адекватно наука отражается в зеркале массовой культуры. Более двадцати лет я собираю артефакты массовой культуры (от открыток и футболок до научно-популярных статей и книг), посвящённые „знаменитой формуле Эйнштейна“.

Недавно друзья подарили мне кружку, которая называется Relativity Floxy Noxy mug. Если набрать эти четыре слова в поисковике компьютера, то можно рассмотреть кружку.

Она в некотором смысле представляет собой квинтэссенцию моей коллекции, так как содержит основные научно-популярные штампы по этой теме. Поскольку эти



Кружка Relativity

штампы продолжают попадать в газеты и в учебники, я решил воспроизвести надписи на чашке и кратко объяснить, что в них неверно. Думаю, что получившаяся заметка может быть полезна многим.

2 Перевод на русский язык текста на кружке

На кружке имеются три колонки текста – направо от ручки (1), налево от ручки (2), напротив ручки (3):

Колонка 1.

В 1905 году 26-летний Эйнштейн
предложил Специальную Теорию
Относительности, используя уравнение:

$$E = mc^2,$$

где

E —энергия,

m —масса,

c —скорость света.

Специальная теория относительности выражает
мысль, что материя и энергия
являются в сущности различными формами
одного и того же. Любая масса имеет
связанную с ней энергию, и наоборот.

Колонка 2.

СПЕЦИАЛЬНАЯ

теория

ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Альберта Эйнштейна.

В 1850-х годах было вычислено, что свет
движется с фиксированной скоростью
670 миллионов миль в час.

Однако, как бы быстро мы ни двигались,
догнать свет мы не можем.

Эйнштейн предложил, что если скорость света
всегда фиксирована, то что-то другое должно
изменяться, а именно должна изменяться масса. Предмет
должен становиться тяжелее по мере того, как его скорость приближается
к скорости света. Он заключил, что энергия и
масса должны быть связанными друг с другом.

Колонка 3.

Его формула означает, что маленькие
количества массы можно превратить
в огромные количества энергии...

...что раскрыло секрет того, как
сияют звёзды, и
послужило ключом
к атомной энергии.

3 Мои уточнения и комментарии

Колонка 1. Как известно, в 1860-70-х годах Максвелл объединил оптику с физической электрических и магнитных явлений, открыв уравнения, описывающие не только статическое, но и движущееся в вакууме со скоростью света электромагнитное поле. В 1880-90-х годах ряд физиков, обнаружив, что уравнения Максвелла не согласуются с уравнениями механики Ньютона, попытались сохранить уравнения Ньютона и при скоростях, сравнимых со скоростью света, запрятав всё новое в гипотезу о том, что масса тела растёт с ростом его скорости. Эти попытки продолжались и в XX веке; они кратко описаны в статьях [1], [2]. Однако довольно скоро выяснилось, что так можно поступить не со всеми уравнениями Ньютона; например, так нельзя поступить со знаменитым уравнением $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, где \mathbf{F} – сила, а \mathbf{a} – ускорение. Оказалось, что надо изменить сами уравнения механики Ньютона, сохранив при этом независимость массы от скорости, но установив новую, очень важную связь массы и энергии. Заметим, что связь силы с импульсом при этом сохранилась: $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$, но связь импульса со скоростью $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ стала, как мы увидим, иной. Всё это сопровождалось изменением языка и философии физики.

Летом 1905 года Эйнштейн опубликовал детальную статью [3], в которой предложил теорию, вскоре названную теорией относительности Эйнштейна, поскольку в ней на электромагнитные явления был распространён принцип относительности Галилея-Ньютона. Согласно этому принципу, никакими опытами внутри замкнутого пространства (например, каюты корабля) невозможно выяснить, движется ли оно прямолинейно и равномерно, или покоится. Затем эту теорию распространили и на только что открытые ядерные явления, и за ней закрепилось название Специальная Теория Относительности (СТО). По существу, СТО – это теория движения и взаимодействия быстрых частиц, скорость которых сравнима со скоростью света. Такие частицы стали называть релятивистскими. (В 1915 году Эйнштейн предложил Общую Теорию Относительности (ОТО), описывающую гравитационные явления. Но в этой заметке мы её касаться не будем.)

Осенью 1905 года появилась короткая заметка Эйнштейна [4] о том, что масса тела есть мера содержащейся в нём энергии. В теории относительности полная энергия свободного тела E равна сумме его кинетической энергии, т.е. энергии движения тела как целого E_K и энергии, содержащейся в покоящемся теле, т.е. энергии покоя E_0 :

$$E = E_K + E_0. \quad (1)$$

Разумеется, представление о свободном теле, изолированном от всех внешних воздействий, является идеализацией, абстракцией. Но абстракция лежит в основе научного метода и является исключительно плодотворной.

Осознание того, что любое покоящееся тело обладает энергией, было величайшим открытием XX века. Величина этой энергии выражается через массу тела m соотношением Эйнштейна:

$$E_0 = mc^2. \quad (2)$$

(Именно в таком виде написал Эйнштейн уравнение (44) в лекциях „Сущность теории относительности“ [5], прочитанных им в 1921 году, хотя понятие энергии покоя E_0 появилось уже в заметке [4] 1905 года.)

Поскольку кинетическая энергия обычных окружающих нас тел даётся известной формулой механики Ньютона $E_K = mv^2/2$ и поскольку скорость обычных тел v много меньше скорости света c , то их кинетическая энергия неизмеримо меньше их энергии

покоя. Но в каждодневной жизни энергия покоя не проявляется. Эйнштейн сразу же заметил, что часть этой энергии выделяется при распаде радиоактивных ядер.

К сожалению, как в начале, так и на протяжении всего XX века, многие известные физики формулировали соотношение Эйнштейна в „упрощённом виде“, опуская индекс ноль у энергии:

$$E = mc^2 \quad (3)$$

и трактуя это соотношение как возрастание массы с ростом не только энергии, но и импульса, и скорости тела.

Известно письмо 1948 года Барнетту — автору книги „Вселенная доктора Эйнштейна“, в котором Эйнштейн предупреждает о том, что не следует пользоваться понятием массы, зависящей от скорости (смотрите копию рукописи этого письма в [1]). Но временами, особенно в научно-популярных текстах, и он опускал индекс ноль. По существу, семантическое завихрение в его творчестве возникло при столкновении двух языков — старого нерелятивистского и нового релятивистского.

Колонка 2. Утверждение о том, что свет всегда имеет фиксированную скорость 670 миллионов миль в час, — правильное, но утверждение, что это было вычислено в 1850-х годах, не вполне верное. Что скорость света конечна, а не бесконечна, выяснил в 1676 году Рёмер, определивший её по наблюдениям спутника Юпитера. Из них следовало, что она составляет примерно 200 000 км/с. Первые и более точные измерения в земных условиях произвёл Физо в 1849 году. А то, что скорость 300 000 км/с с высокой точностью фиксирована, т.е. не зависит от скорости источника света и наблюдателя, обнаружили в 1887 году Майкельсон и Морли.

Заклучение о том, что энергия и масса связаны друг с другом, несомненно правильное, поскольку $E_0 = mc^2$. А вот утверждение о том, что масса тела должна меняться вместе с его скоростью, заведомо неверное. В теории относительности, в отличие от механики Ньютона, мерой инерции является не масса тела m , а его полная энергия E , а импульс тела \mathbf{p} связан с его скоростью \mathbf{v} не соотношением Ньютона $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, а соотношением

$$\mathbf{p} = (E/c^2)\mathbf{v}. \quad (4)$$

В результате изменить импульс тела тем трудней, чем больше его энергия E . И только при нулевом импульсе, когда $E = E_0$, т.е. когда полная энергия равна энергии покоя, только тогда $E/c^2 = m$.

Прочувствовать, что именно энергия частицы является мерой её инерции можно на примере Большого Электрон-Позитронного коллайдера LEP, работавшего в ЦЕРН в последнее десятилетие XX века. В его кольцевом туннеле длиной 27 км электроны и позитроны с энергией около 50 ГэВ летели навстречу друг другу. Удерживались они в этом кольце довольно слабым полем железных магнитов, расположенных в туннеле. (Если бы не было поля, частицы летели бы по инерции по прямой линии.) Точно так же удерживало бы это поле и протоны с тем же импульсом и почти той же энергией, несмотря на то, что масса протона почти в 2000 раз больше массы электрона. В 2010 году в том же туннеле заработал Большой Адронный Коллайдер LHC. Чтобы удерживать в нём протоны с энергией 3500 ГэВ, понадобилось в 70 раз более сильное поле сверхпроводящих магнитов.

Итак, мерой инерции частицы является её полная энергия.

Колонка 3. Здесь всё правильно, если говорить о формуле $E_0 = mc^2$ и учесть, что в ядерных реакциях в звёздах, на Солнце и на Земле часть энергии покоя сгорающих частиц превращается в энергию движения продуктов горения. Это же, разумеется, относится и ко всем процессам горения.

4 Четыре измерения мира

Теперь я хотел бы сказать несколько слов тем, кто более или менее знаком с четырёхмерным математическим аппаратом теории относительности, введённым Минковским в 1908 году [6]. В четырёхмерном мире (4-мире) Минковского временная координата события ct и 3-вектор его пространственного положения \mathbf{r} образуют четырёхмерный вектор. Аналогичным образом энергия свободного (изолированного) тела E (более точно, E/c^2) и три компоненты его импульса \mathbf{p} (более точно, \mathbf{p}/c) образуют четыре компоненты псевдоевклидова 4-вектора. Масса тела m представляет собой скаляр, равный длине этого 4-вектора:

$$m^2 = E^2 c^{-4} - \mathbf{p}^2 c^{-2}. \quad (5)$$

(Слово „псевдоевклидовый“ указывает на то, что квадрат длины 4-вектора равен не сумме, а разности квадратов его E - и \mathbf{p} -компонент.)

Тейлор и Уилер в книге [8] откладывают величины энергии и импульса по ортогональным осям, а на гипотенузе прямоугольного треугольника откладывают величину массы с помощью утолщённого отрезка. Но можно просто изобразить соотношение (5) в виде прямоугольного треугольника, если переписать его в виде $E^2 = m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2$ (смотрите статью [7]). Тогда энергия – гипотенуза, а масса и импульс – катеты. Отсюда, в частности, следует, что

$$E_K = \sqrt{m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2} - mc^2. \quad (6)$$

Основное соотношение специальной теории относительности (5) проверено в тысячах опытов с точностью до десятка значащих цифр. Из него, для тела, обладающего массой, при импульсе, равном нулю, следует формула $E_0 = mc^2$, где индекс ноль у энергии указывает на то, что E_0 это энергия не движущегося, а именно покоящегося тела. Если же переписать это же соотношение в виде $(Ec^{-2} - m)(Ec^{-2} + m) = \mathbf{p}^2 c^{-2}$, то при $E_K \ll E_0$ без разложения квадратного корня получается Ньютоновское $E_K = \mathbf{p}^2/2m$. Аналогичным образом для релятивистских частиц получаем $E - |\mathbf{p}|c = mc^2/2E$. (Это уравнение очень существенно при описании нейтринных осцилляций.) Из того же соотношения (5) и формулы (4) для скорости $\mathbf{v} = \mathbf{p}c^2/E$ следует, что скорость безмассового фотона при любой энергии равна c .

Так что специальная теория относительности безупречна, чего нельзя сказать о её популяризациях.

К сожалению, внезапная болезнь и смерть Минковского не позволили ему убедить его современников в преимуществах четырёхмерного мира, и они продолжали „засовывать“ содержание теории относительности в трёхмерные уравнения механики Ньютона. Хотя Эйнштейн использовал четырёхмерие при формулировке общей теории относительности как теории гравитационного взаимодействия, уравнения $E^2 c^{-4} - \mathbf{p}^2 c^{-2} = m^2$ в его собрании сочинений мне найти не удалось. Впервые оно появилось в статьях Клейна [9], Фока [10], Гордона [11] (1926) и особенно трудах Дирака [12] (1930), в которых была создана релятивистская квантовая механика. (Эйнштейн, несмотря на то, что он стоял у истоков понятия кванта, так и не принял квантовой механики.) И только позднее эта формула появилась не только в квантовой, но и в классической электродинамике, в учебнике „Теория поля“ Ландау и Лифшица в 1941 году (на русском языке) [13].

Четырёхмерие позволило единым образом описывать как массивные, так и безмассовые частицы материи. Оно позволило понять, что масса и материя – это не одно и

то же, что энергия и импульс – это меры всех процессов и всех движений в природе. Что же касается массы частиц, то она становится несущественной в процессах при очень высоких энергиях $E \gg mc^2$.

5 Скорость света как единица скорости

Существование универсальной максимальной скорости c даёт возможность выражать любую скорость v в единицах c как безразмерное число $\beta = v/c$. При этом очевидно, что для самой c получается $\beta = 1$. Это позволяет вообще избавиться от буквы c в уравнениях теории относительности, записав уравнения (2), (4), (6) в виде

$$E_0 = m, \quad m^2 = E^2 - \mathbf{p}^2, \quad \mathbf{v} = \mathbf{p}/E. \quad (7)$$

Уравнение же (3) $E = mc^2$ сводится к $E = m$. Оно явно противоречит уравнению (1) $E = E_K + E_0 = E_K + m$ и, следовательно, неправильно.

6 Заключение

В 1980-х годах Володя Грибов, взгляды которого на $E = mc^2$ полностью совпадали с моими, по-дружески советовал мне не бороться с этим неверным уравнением, т.к. победить его нельзя. С ощущением постоянного поражения писал я предыдущий текст для тома „Грибов-80“ летом 2010 года во время небывалой жары и смога в Москве, что не могло не ухудшить качество текста. Осенью, несколько недель тому назад, Юлия Нири напомнила мне, что этот текст является по существу продолжением того, что я опубликовал в томе „Грибов-75“ [14]. Там я сравнил формулу $E = mc^2$ с вирусом. Действительно, понятие релятивистской массы, запятанное в этой формуле, – это семантический вирус, очень похожий на компьютерные вирусы. Заражённые им люди (они часто называют себя релятивистами) убеждены, что Релятивистская Масса – это основной портал, ведущий в здание Теории Относительности. Они убеждены в этом, потому что считают массу мерой инерции. Они игнорируют тот факт, что масса является мерой инерции только для очень медленных тел и частиц, у которых энергия покоя E_0 настолько больше, чем кинетическая энергия E_K , что кинетической энергией можно пренебречь. При не очень малых скоростях масса – это только приближённая мера инерции. Для быстрых же частиц (фотонов, нейтрино, протонов в Большом Адронном Коллайдере), для которых $E_K \gg mc^2$, мерой инерции является их энергия E .

Общеизвестно, что формулы в физике – это продолжение обычного языка: уравнения – это закодированные фразы, а символы, из которых состоят уравнения, заменяют обычные слова или термины. Чтобы не возникала путаница, каждый символ должен быть однозначно связан с соответствующим ему термином. Можно ли ввести в теорию относительности понятие релятивистской массы? Безусловно – можно: $m_r = E/c^2$, хотя это будет просто другим обозначением энергии, поскольку c – универсальная константа. Можно ли вслед за этим ввести понятие релятивистской массы покоя: $m_{r0} = m$? Безусловно – можно. Конечно, можно ввести и то, и другое; но незачем, потому что СТО и без m_r , и без m_{r0} является законченной, самосогласованной теорией. А вот эту релятивистскую массу покоя m_{r0} обозначать символом m_0 и называть её просто массой покоя уже нехорошо, т. к. это уже как бы подразумевает, что в СТО масса m зависит от скорости. А все мы прекрасно знаем, что в СТО m –

лоренцовский инвариант: масса m одна и та же в покое и в движении, и навешивать на неё индексы бессмысленно.

Но настоящая беда возникает, когда m_r называют массой и обозначают символом m , а обычную ньютоновскую массу m в СТО называют массой покоя и начинают обозначать m_0 . Это смешение двух языков („французского с нижегородским“) уродует прекрасную теорию, приводит к невообразимой путанице, длящейся уже сто лет, препятствует пониманию сути СТО. А „релятивисты-философы“ утверждают при этом, что ньютоновская механика якобы не является предельным случаем эйнштейновской и что эти две теории якобы несоизмеримы.

В результате обратного воздействия массовой культуры на научную литературу, в лучшем учебнике по физике XX века, вышедшем в 1960-х годах, – „Фейнмановских лекциях по физике“ [15] во многих главах повторяется утверждение, что согласно теории относительности, масса растёт с ростом скорости. То же утверждает и маленькая популярная книжечка Ландау и Румера „Что такое теория относительности?“ [16]. (Эта книга была написана в 1930-х годах, до ареста обоих авторов, а вышла из печати в 1950-х годах, после освобождения Румера из ссылки. (Ландау пробыл в тюрьме год.)) „Теория поля“ Ландау и Лифшица [13], вышедшая из печати в 1940-х годах, была первым учебником в мире, в котором масса последовательно не зависела от скорости. Тем не менее, понятие энергии покоя и символ E_0 в ней отсутствовали, а формула Эйнштейна была дана в форме $E = mc^2$. Это несоответствие сохранилось даже в последнем издании книги, вышедшем в XXI веке. Поистине, никто не совершенен. Не совершенен наш язык: „мысль изречённая есть ложь“.

Невозможно в этой краткой заметке перечислить книги и статьи авторов, создавших теорию относительности, но их легко найти, если кликнуть гипер-ссылки [1], [2], [7], [14], [17], [18], приведённые ниже. Седьмая гипер-ссылка [19] содержит слайды доклада о том, что всё преподавание физики должно быть основано на двух фундаментальных константах природы: c и \hbar . Опираясь этими двумя константами, я предполагаю изложить основы физики в маленькой книжечке „Азы физики“ на ста страницах.

Благодарности

Я благодарен Эрике Гуляевой, Мареку Карлинеру, Эле и Виталию Кисиныным, Дмитрию Надёжину, Борису Окуню и Зурабу Силагадзе, общение с ними помогло мне написать эту заметку.

Работа поддержана грантом Президента РФ НШ-4172.2010.2.

Список литературы

- [1] The concept of mass. Physics Today. June 1989, 31-36.
http://www.itep.ru/theor/persons/lab180/okun/em_3.pdf
- [2] Формула Эйнштейна: $E_0 = mc^2$. „Не смеётся ли Господь Бог“?. Успехи физ. наук, **178** (5), 541-555 (2008).
http://ufn.ru/ufn08/ufn08_5/Russian/r085g.pdf
- [3] Einstein A/ Zur Elektrodynamik bewegter Körper. Ann Phys **17**, 891-921 (1905).
К электродинамике движущихся тел. Собрание научных трудов т **1**, с 7 М Наука (1965).

- [4] Einstein A. Ist die Tragheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?. Ann Phys **18**, 639-641 (1905).
Зависит ли инерция тела от содержащейся в нём энергии? Собрание научных трудов т **1**, с 36, М Наука (1965).
- [5] Einstein A. Four lectures on the theory of relativity, held at Princeton University in May 1921. Collected papers of Albert Einstein v **7**, doc 71. Princeton (1997).
Сущность теории относительности. Собрание научных трудов т **2**, с 5, М Наука (1965).
- [6] Minkowski H. Raum und Zeit. Phys Zeit **10**, 104-111 (1909).
Пространство и время. УФН **69**, 303-320 (1959).
- [7] Теория относительности и теорема Пифагора. Успехи физ. наук, **178** (6), 647-653 (2008).
http://ufn.ru/ufn08/ufn08_6/Russian/r086j.pdf
- [8] Taylor E F, Wheeler J A. Spacetime physics. New York (1992) (pp 246-252 Dialog: Use and Abuse of the concept of mass).
- [9] Klein O. Quantum Theorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. Zeit f Physik **37**, 895-906 (1926).
- [10] Fock V. Über die Invarianten Form der Wellen- und der Bewegungsgleichungen für einen geladenen Massenpunkt. Zeit f Physik **39**, 226-232 (1926).
Об инвариантной форме волновых уравнений и уравнений движения заряженной точечной массы УФН **180**, 874-877 (2010).
- [11] Gordon W. Der Compton Effect nach der Schrödingerschen Theorie. Zeit f Physik **40**, 117-133 (1926).
- [12] Dirac P A M. The principles of quantum mechanics (1930).
Принципы квантовой механики М Наука, (1979).
- [13] Ландау Л Д, Лифшиц Е М. Теория поля. М (1941).
- [14] The virus of relativistic mass in the year of physics *in* Gribov memorial volume (quarks, hadrons and strong interactions). Yu L Dokshitzer, P Levai, J Nyri Editors, WS, 470-473 (2006).
http://www.itep.ru/theor/persons/lab180/okun/em_22.pdf
- [15] Feynman R P, Leighton R B, Sands M. The Feynman lectures on physics. Addison-Wesley (1963).
Фейнмановские лекции по физике. УРСС М (2004).
- [16] Ландау Л Д., Румер Ю Б Что такое теория относительности?. Советская Россия М (195).
- [17] Energy and Mass in Relativity Theory. World Scientific (2009).
<http://www.worldscibooks.com/physics/6833.html>

- [18] Mass versus relativistic and rest masses. Am. J. Phys. **77**,(5), 430-431 (2009).
<http://www.itep.ru/theor/persons/lab180/okun/doc/AJP000430.pdf>
- [19] Основные понятия и законы физики и свойства элементарных частиц материи.
Доклад на Президиуме Российской Академии Наук 27.10.2009 на сайте ОФН РАН.
http://www.gpad.ac.ru/info/contributions/Okun_Prez.pdf